Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Daniel Palacín — Wintersemester 2019/2020

Modelltheorie
Blatt 5
Abgabe: 03.12.2019, 14Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Eine Teilmenge Y eines topologischen Raumes X ist *dicht*, falls $Y \cap U \neq \emptyset$ für jede nicht-leere offene Menge U von X.

a) Falls X unendlich und T_1 ist, zeige, dass jede dichte Teilmenge unendlich ist.

b) Angenommen, dass X unendlich, kompakt und 0-dimensional derart ist, dass X eine abzählbare Basis der Topologie besitzt. Zeige, dass X die *schwache Baire Eigenschaft* besitzt: für jede Familie $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ offener dichter Mengen gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$.

HINWEIS: Konstruiere eine absteigende Kette $\emptyset \neq B_{n+1} \subset B_n \subset U_n$ von Basiselementen und nehme das Komplement.

c) Analog zum obigen Beweis zeige, dass X die *Baire Eigenschaft* besitzt: für jede Familie $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ offener dichter Mengen, ist die Menge $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**
Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, sei $\mathcal{B}$ die Kollektion aller Teilmengen der Form $a + k \cdot \mathbb{Z}$, für Elemente $k \neq 0$ und a aus $\mathbb{Z}$.

a) Zeige, dass $\mathfrak{B}$ eine Basis einer Topologie T bildet.

b) Zeige, dass jede nicht-leere offene Menge in dieser Topologie unendlich ist.

c) Zeige, dass $\mathbb{Z}$ mit dieser Topologie Hausdorff und 0-dimensional ist.

d) Schließe daraus, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

HINWEIS: Gib eine geeignete offene Überdeckung des Komplementen der Menge $\{-1, 1\}$.

e) Ist der topologische Raum $(\mathbb{Z}, T)$ kompakt?

HINWEIS: Benutze Aufgabe 1(*b*) oder die Tatsache, dass die Menge $3 + 5 \cdot \mathbb{Z}$ unendlich viele Primzahlen enthält (es folgt aus dem Satz von Dirichlet).

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
In der Sprache $\mathcal{L}$, sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur.

a) Zeige für jede Teilmenge $B \subset A$, dass der Stoneraum $S_n^{\mathcal{A}}(B)$ genau dann endlich ist, wenn alle n-Typen in $S_n^{\mathcal{A}}(B)$ mit Parametern aus B isoliert sind.

b) Zeige für jedes $n \geq 1$ aus $\mathbb{N}$, dass die Kollektion isolierter n-Typen in $S_n^{\mathcal{A}}(A)$ mit Parametern aus A dicht ist.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.